Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

7-й класс

Решения

1. Можно ли расставить в выражении

   2*0*1*2*2*0*1*2*…*2*0*1*2

   (2013 групп вида 2*0*1*2) вместо звёздочек знаки «+» и «–» так, чтобы получилось 2013?

   Ответ: можно.

   Решение.

   В одной группе возможно с помощью указанных операций получить число 1: 2+0+1-2=1. Поставив между 2013 группами знаки «+», получим значение выражения, равное 2013.

2. Петров придумал четыре числа a=209, b=35, c=37 и d=17, прочитал их последовательно:

   Двести девять, тридцать пять,
   Тридцать семь, семнадцать,

   и предложил Васечкину придумать ещё четыре числа e, f, g и h таких, чтобы прочитанные последовательно по строчкам:

   a, b,
   c, d,
   e, f,
   g, h,

   они образовывали четверостишие, в котором первая строка рифмуется с третьей, а вторая – с четвёртой, причём $(a-b)=2(e-f)$, $(c-b)=2(g-f)$, $(c-d)=2(g-h)$. Васечкин задание выполнил. Сможете ли сделать это Вы?

   Ответ: e=112, f=25, g=26, h=16.

   Решение.

   Поскольку первая строка должна рифмоваться с третьей, число f, возможно, заканчивается на пять. Вторая строка рифмуется с

четвёртой, тогда h может быть числом из второго десятка. Кроме того, $18=b-d=(c-d)-(c-b)=2(g-h)-2(g-f)=2(f-h)$, откуда $(f-h)=9$. Подойдут числа $f=25$ и $h=16$. Тогда $e=112$, так как $(a-b)=2(e-f)$, $2e=(a-b)+2f=209-35+50=224$. И $g=26$, поскольку $(c-b)=2(g-f)$, $2g=(c-b)+2f=37-35+50=52$. В итоге получится четверостишие:

Двести девять, тридцать пять,
Тридцать семь, семнадцать,
Сто двенадцать, двадцать пять,
Двадцать шесть, шестнадцать.

Замечание. Возможно, что решение не единственно.

3. Жили-были четыре друга: Альберт, Карл, Дитрих и Фридрих. Фамилия каждого из них совпадает с именем кого-то из его друзей, и среди них нет однофамильцев. Кроме того, фамилия Дитриха не была Альберт. Определите фамилию каждого из мальчиков, если известно, что имя мальчика по фамилии Фридрих, совпадает с фамилией того мальчика, имя которого – фамилия Карла.

Ответ: у Альберта фамилия Дитрих, у Карла – Альберт, у Дитриха – Фридрих, у Фридриха – Карл.

Решение.

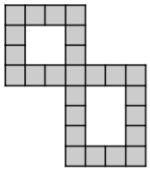
Обозначим с помощью Y фамилию Карла, с помощью X – имя мальчика с фамилией Фридрих. Тогда по условию у Карла фамилия Y, у Y фамилия X, у X фамилия Фридрих. Кроме того, $X\neq Y$, $X\neq$«Фридрих», $Y\neq$ «Карл». Если $Y=$«Фридрих», то $X=$«Карл» и у Фридриха фамилия Карл, у Карла – Фридрих, значит у Альберта фамилия Дитрих, у Дитриха – Альберт, что противоречит условию. Значит, остаются два варианта: 1) $X=$«Альберт», $Y=$«Дитрих»; 2) $X=$«Дитрих», $Y=$«Альберт». Но в первом случае вновь получается, что у Дитриха фамилия Альберт, что противоречит условию. Остаётся второй вариант, из которого следует, что у Карла фамилия Альберт, у Альберта фамилия Дитрих, у Дитриха фамилия Фридрих и у Фридриха фамилия Карл.

4. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было а) чётное; б) нечётное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если у них общая сторона).

Ответ: а) можно; б) нельзя.

Решение.

а) Один из вариантов решения представлен на рисунке.



б) Предположим, что удалось закрасить 25 клеток требуемым образом. Попробуем найти число общих сторон закрашенных клеток и придём к противоречию. Сосчитаем, сколько у каждой клетки общих сторон с соседями, сложим полученные числа и сумму разделим пополам (так как каждую общую сторону мы считаем при этом дважды). У каждой клетки – нечётное число соседей, и клеток 25. Сумма 25 нечётных чисел нечётна. Полученная сумма не делится нацело на 2.

5. Найдите прямоугольник с целочисленными сторонами, площадь которого численно равна периметру.

Ответ: прямоугольник 3 на 6, квадрат 4 на 4.

Решение.

Обозначим стороны прямоугольника a и b. Пусть для определённости $a \le b$. Согласно условию $ab=2(a+b)$. Тогда $ab-2a-2b=0$ или $ab-2a-2b+4=4$, то есть $(a-2)(b-2)=4$. Следовательно, $(a-2)=1$ и $(b-2)=4$ или $(a-2)=2$ и $(b-2)=2$. Получаем два решения: 1) $a=3$ и $b=6$; 2) $a=4$ и $b=4$.